APÉNDICE

SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRIA

Las consideraciones que siguen han de tener necesariamente un marcado *carácter histórico,* mayor todavía que el de las dedicadas a análogo fin en la primera parte de estas lecciones, pues la antigüedad de la Geometría como ciencia, la convierte en una materia de enseñanza, tradicional como ninguna otra de las disciplinas a que nos hemos referido anteriormente. Esta fuerte tradición, al lado de algunas ventajas, presenta grandes peligros; en efecto, *la enseñanza actual de la Geometría está en general muy sobrecargada* y este defecto proviene del respeto con que se miran muchas partes que bien pudieran ser suprimidas o sustituídas por otras materias de más importancia.

Para comprender la forma actual de la enseñanza geométrica, es conveniente remontarse hasta la época del Renacimiento (desde 1200 en adelante).

Entonces se estudiaban las obras de los antiguos, y especialmente los *Elementos de Euclides,* como introducción a la Geometría, a lo cual se agregaban cuestiones, aisladas de la Geometría de los antiguos, tales como el *cálculo de π por Arquímedes* y el *tratado de las secciones cónicas de Apolonio* y volvía el interés por las *construcciones con la regla y el compás,* que era característico en la *escuela platónica.* Se ve en seguida que la elección de estas materias es demasiado exclusivista, pues tanto las aplicaciones de todas clases como la formación de la intuición espacial son relegadas sistemáticamente y sólo se toma en consideración la parte abstracta y lógica de la deducción geométrica. Pero lo más asombroso es que no sólo los investigadores y eruditos siguiesen ese cambio, sino que de acuerdo con este modo de ver, se llegase a considerar los «Elementos de Euclides» ¡como un libro apropiado para la primera enseñanza! Seguramente que la opinión del propio Euclides, hubiera sido contraria a tal empleo de su libro, pues éste procede—y nunca se repetirá esto bastante—de lecciones universitarias y puede ser cualquier cosa menos un libro de texto; esta mala inteligencia ha prevalecido hasta nuestros días, como tendremos ocasión de hacer notar repetidas veces.

Las exigencias que ha de satisfacer un buen libro de texto de Geometría, son las siguientes:

1. *Punto de vista psicológico.*—La enseñanza no puede depender solamente de la materia objeto de la enseñanza, sino sobre todo del *sujeto* a quien se enseña. Una misma cosa debe ser presentada de distinto modo a un muchacho de seis años que a uno de diez y a éste que a un hombre maduro. En lo que se refiere especialmente a la Geometría, ésta debe reducirse en la enseñanza secundaria a la *intuición concreta,* y pasar después poco a poco a los *elementos lógicos:* de una manera general puede decirse que *el método genético es el único apropiado,* porque permite al alumno ir penetrando en las cosas sin esfuerzo.

2. *Selección de materias.*—Es preciso elegir aquellas partes de la Geometría pura y de la aplicada que parecen corresponder *al objeto de esta Ciencia dentro del marco de la enseñanza general* sin dejarse influir por consideraciones de orden histórico.

3. *Objeto de la enseñanza en general.*—No podemos entrar aquí en el examen de las sutiles distinciones, que entre las diversas escuelas pedagógicas se establecen. Es suficiente hacer notar la conveniencia de que la eneñanza se adapte *a la orientación especial de la cultura de cada época.* No creemos pecar de utilitarios diciendo que el objetivo de la escuela mo-

derna debe ser *capacitar a gran número de individuos para la colaboración en los fines de la cultura humana, cuya tendencia esencial es hoy día la actuación práctica.* De aquí se deduce la necesidad de conceder *cada vez más atención a las ciencias naturales y a la técnica* en el estudio de la matemática.

4. No podemos ofrecer aquí una *determinada selección de materias.* Ello compete al maestro que puede hacerlo mejor, a causa de su experiencia en la enseñanza. El objeto de estas lecciones es, como ya hemos indicado, proporcionar a los profesores una *ojeada general sobre la totalidad de la Geometría,* preparándoles así para que puedan hacer por sí mismos una juiciosa selección.

5. Es conveniente insistir en las ventajas de la *fusión de la enseñanza de la Planimetría y la Estereometría,* utilizando para el estudio de la primera la intuición espacial. También ofrece ventajas la fusión de la *Aritmética con la Geometría,* no queriendo esto decir que ambas disciplinas deban mezclarse completamente, sino que no deben separarse en absoluto, como hoy se hace en la mayoría de las escuelas.

A estas condiciones es preciso agregar la *práctica docente del maestro,* sin la cual resultan completamente inútiles. De aquí resulta la dificultad de emitir juicios generales sobre estos asuntos, pues aun en un mismo país, cada establecimiento y casi cada profesor, tienen un modo peculiar de actuación. Parece, sin embargo, que pueden señalarse algunas líneas generales, prescindiendo de casos particulares posibles y manteniéndose en un prudente término medio:

1.° Actualmente se concede muy poca importancia didáctica a la *fusión de las diferentes ramas de la Matemática.* En relación con el olvido en que se tiene este principio general, están algunos defectos en el modo de tratar ciertas materias; defectos que vamos a indicar someramente:

a) Si bien es cierto que en todos los programas están incluídos el *dibujo y la representación* de las figuras geométricas, también es verdad que se les concede poco valor, pues en vez de presentarlos en íntima conexión con todo lo que constituya el plan didáctico, son tratados como si se tratase de cosa secundaria. Como consecuencia de esto, resulta que lo que pudiéramos llamar *espíritu de la Geometría moderna,* no puede penetrar en la enseñanza, ya que tiene como principal fuente de inspiración la *idea de la movilidad de cada figura,* la cual permite llegar al conocimnento integral de la figura, prescindiendo de casos particulares. Frecuentemente se encuentran en los programas, algunos capítulos aislados de «Geometría moderna», tales como el estudio de las cuaternas armónicas y de las transversales, pero en vez de emplear para su exposición el método que les es propio y que permite abarcar de una ojeada todas estas cuestiones, se enseñan siguiendo los métodos de Euclides, perdiéndose la idea fundamental en una intrincada red de numerosos casos particulares.

b) En las escuelas (*) se establece una separación absoluta entre la *Aritmética y la Geometría.* Un ejemplo de hasta qué punto llega esta separación, es la ya mencionada manera de tratar la *teoría de las proporciones* que suele enseñarse, primero aritméticamente, y después sin hacer la menor referencia a ello, en Geometría.

c) La *Geometría analítica,* con el teorema fundamental de que una función $y=f(x)$ representa una curva, es accesible a los alumnos de los grados inferiores de la enseñanza, debiendo introducirse en ésta lo antes posible, y aplicarse después en todo momento para que penetre profundamente en el espíritu de la enseñanza geométrica. En lugar de esto, lo que se hace es añadir el concepto de función, después de terminada la Geometría ; así las secciones cónicas se estudian primero sintéticamente (¡en el sentido de los antiguos!), y después se muestra cómo puede simplificarse este estudio con el auxilio de una *nueva disciplina,* la Geometría analítica. La concepción, que las modernas investigaciones históricas demuestran que se remonta a la época de Apolonio, de utilizar como fundamental la Geometría analítica, no se aplica aquí generalmente.

2. Este estancamiento de la enseñanza en la tradicional separación de disciplinas, ha tenido también sus consecuencias

(*) Designaremos en general con el nombre de *escuelas* los distintos establecimientos de segunda enseñanza que en Alemania existen.

científicas (*). Limitándonos por ahora a la Geometría elemental, queremos poner de manifiesto los profundos errores a que ha dado lugar su separación absoluta de las demás ramas de la Matemática. Algunos capítulos especiales de la Geometría se han desarrollado aisladamente de un modo prodigioso, habiendo así penetrado en la enseñanza escolar, muchas materias que aun miradas desde un punto de vista superior, ofrecen un interés muy relativo:

a) Entre estas materias puede incluirse, desde luego, lo que en las escuelas acostumbra a llamarse *Geometría algebraica* (**), que comprende el cálculo de algunos elementos de triángulos y otras figuras, seguido de su construcción geométrica. Para darse cuenta del valor real de tales teorías, basta con recordar que en la enseñanza superior no son utilizadas ni una sola vez, lo que demuestra que son ramas sin importancia que se han desarrollado artificiosamente sin fundirse de un modo fecundo con la totalidad de la Ciencia.

b) *Las construcciones relativas a los triángulos* son dignas de especial mención. Toda construcción de figuras es interesante y útil y la aplicación de métodos gráficos es sumamente recomendable. La Matemática moderna tiende a ello cada vez más, como lo prueban las lecciones del Profesor Runge en Gotinga sobre métodos gráficos (***), pero en las escuelas no se tra-

---

(*) No puede negarse, sin embargo, que la Geometría elemental, aun dentro de la limitación que lamentamos, ha dado origen a interesantes problemas. Como bibliografía concerniente a este asunto, indicaremos las siguientes obras:

Max Simon, Über die Entwiklung der Elementargeometric im 19 *Jahrhundert*. Jabresbericht d. d. Math-Verein. Ergänzungsband I (Leipzig, 1906).

Klein, Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie, Augearb. von F. Tägert. Leipzig, 1895.

F. Enriques, Questioni riguardanti la Geometria elementare. Bologna, 1900.

A. Adler, Theorie der geometrischen Konstruktionen. Sammlung Schubert, 52 (Leipzig, 1906).

(**) Claro es que nada tiene que ver con la verdadera «Geometría algebraica».

(***) Véase, por ejemplo, *C. Runge*, Graphische Mathoden, segunda edición, Leipzig, 1919; y *H. v. Sanden*, Praktische Analysis, Leipzig, 1914.

ta de estas importantes e interesantes cuestiones generales, sino que prevalecen los ejercicios de *construcción de triángulos,* y muy especialmente aquellos que son resolubles con la *regla* y *el compás*. Es de todos sabido, que para obtener un gran número de problemas difíciles, basta escoger los tres elementos que determinan un triángulo de diferentes modos, o mejor aún, *del modo que la solución pueda presentar mayores dificultades* como ha llegado a decirse con mucha razón.

La ejecución material de estas construcciones no tiene ningún valor, además de lo cual, resultan molestas y complicadísimas por la limitación de los medios que para ellas se emplean. Pudieran, sin embargo, aprovecharse, teniendo en cuenta que algunas están relacionadas con profundos problemas teóricos, como ocurre, por ejemplo, con la construcción del eptágono regular y la trisección del ángulo, cuya imposibilidad con la regla y el compás se demuestran algebraicamente; pero este único objeto que pudieran tener tales ejercicios, no es alcanzado en las escuelas, lo que contribuye a que la turba de cuadradores y trisectores no desaparezca nunca.

c) Finalmente, hay que citar la llamada *Geometría del triángulo;* es decir, la teoría de los puntos y rectas *notables* del mismo, que como disciplina independiente se ha desarrollado en la Matemática escolar, al mismo tiempo que perdía importancia dentro de la superior. En efecto; como hemos visto, está enclavada en un rincón de la Geometría proyectiva; se trata solamente de la teoría de invariantes de la figura formada por tres puntos cualesquiera y los puntos circulares del plano; es decir, de un caso particular poco importante.

Terminada esta crítica general sobre la forma de la enseñanza matemática en la actualidad, estudiaremos su desarrollo en algunos países, limitándonos, como es lógico, a las principales naciones europeas cultas: Inglaterra, Francia, Italia y Alemania.

I. La enseñanza en Inglaterra

La tradición euclídea se ha sostenido en Inglaterra durante largo tiempo, y aun hoy día ejerce influencia sobre los métodos de enseñanza. La causa principal es la organización de los «*examina*» ingleses, establecidos con la intención de respetar el admirable principio pedagógico ; así el sistema que rige en Inglaterra, es el de *exámenes rigurosamente centralizados, a los cuales se somete la labor de organismos privados, absolutamente independientes*. Como se ve, esta organización es absolutamente contraria a la nuestra, establecida sobre la base de que en cada escuela los alumnos sean examinados por sus mismos profesores, que por conocer a aquéllos individualmente, pueden atender en el acto del examen a las características personales de cada uno. Por esta causa, podemos tener un plan único, que determina el contenido y la orientación general de la enseñanza para todas las escuelas. En Inglaterra, por el contrario, las escuelas son simples instituciones privadas, que como consecuencia de la casi absoluta libertad de acción que se les concede, tienen una organización muy heterogénea. Unicamente carecen del derecho de examinar a sus alumnos, pues prevalece el criterio de que el examinador no debe conocer al examinando, ni siquiera verle, sino juzgar de su capacidad, ateniéndose exclusivamente a un ejercicio escrito.

Las Comisiones examinadoras están en Londres, Cambridge y Oxford. La de Londres, por ejemplo, examina anualmente veinticuatro mil alumnos, proponiéndoles los mismos problemas y haciéndoles las mismas preguntas. Cada examinador dispone de treinta ayudantes, debiendo, por lo tanto, cada uno de ellos corregir el mismo trabajo ochocientas veces. No es necesario decir que nadie se encargaría de semejante tarea si no fuese generosamente retribuído.

En lo que concierne a la enseñanza matemática, tales procedimientos no podrían ser puestos en práctica, sin la existencia de una *standard-work*, conocida por todos los alumnos y que sirva de base a las cuestiones que formule el examinador. Para la Geometría, esta obra tipo es en Inglaterra, desde hace largo tiempo, los «*Elementos*» *de Euclides*. Así se comprende que la aplicación de este sistema, empleando siempre el mismo libro y el mismo método de enseñanza, haga que todo propósito de reforma tropiece con grandes dificultades. Por una parte, las autoridades examinadoras no pueden reorganizar la enseñanza de todo el país, porque carecen de influjo oficial sobre ella, y por otra parte el carácter de uniformidad que forzosamente tiene que tomar su trabajo, no les permite fijar la atención en las tendencias reformadoras de ciertas escuelas aisladas que se preocupen de ensayar nuevos métodos de enseñanza.

Examinemos con más detenimiento el *Euclides escolar inglés*, fijándonos, por ejemplo, en la edición de *R. Pott* (*), que en los últimos decenios ha tenido una gran difusión.

Contiene solamente (esto es característico) los libros 1 al 6 (Planimetría) y 11 y 12 (principios de estereometría y métodos de exhaustación) traducidos lo más literalmente posible, algunas notas explicativas e históricas y problemas. Faltan, por consiguiente, los libros 7 al 9 de carácter aritmético; la clasificación de los irracionales del 10; y los cuerpos regulares, del 13.

Siguiendo el método tradicional, estas materias son aprendidas en las escuelas inglesas, más o menos de memoria, con el objeto de tenerlas prestas para el momento del examen. *Perry* hace a propósito de las características de este método la satírica observación siguiente:

«Muy sana debe ser la naturaleza inglesa, para que haya podido soportar durante siglos enteros, un sistema de formación tan inadecuado». Es cierto que en Inglaterra se ha sentido también la necesidad de conceder alguna atención a las modernas investigaciones, pero al hacerlo, el estilo rígido de Euclides no ha dejado de ejercer una influencia suficiente para ahogar el espíritu moderno de las tentativas.

Como ejemplo de tales «*sequels to Euclid*», puede presentarse el libro de *J. Casey* (**), que desarrolla por el mismo sistema los principios de la Geometría proyectiva.

La reacción contra semejante estado de cosas, tenía necesariamente que venir y comenzó a manifestarse en 1860 con una campaña del gran matemático inglés *Sylvester*, dando por re-

(*) Euclid, elements of geometry. London, 1869.

(**) A sequel to the first 6 books of Euclid, containing an easy introduction to molern geometry. Dublin, 1900.

sultado, poco después en 1874, la fundación de la «*Association for the improvement of geometrical teaching*», que ha trabajado con entusiasmo hasta conseguir editar un nuevo *libro tipo*, llamado *Elements of plane Geometry* (*). El trabajo realizado en este libro, consiste esencialmente en suavizar e igualar el contenido de los seis primeros libros de Euclides. Así, por ejemplo, las desigualdades que lamentábamos en el comienzo del primer libro han desaparecido, y la noción de movimiento se aplica de un modo consecuente. Sin embargo, el tratado inglés conserva el contenido y el orden de materias del de Euclides, siempre, naturalmente, con vistas al examen obligatorio. Este tratado constituye, pues, una débil reforma, no obstante lo cual, se encuentran entre él y el viejo sistema euclídeo, algunas contradicciones. Muestra de la lucha entre euclídeos y reformadores, es un folleto de *Dogson*, titulado «*Euclid and his modern rival*» (**), en el cual el autor hace comparecer imaginariamente nada menos que ante el juez del infierno, Minos, a Euclides y a sus modernos rivales, que son los autores de nuevos Tratados y a su cabeza *Legendre*, pero sólo el primero soporta brillantemente la prueba, mientras que los otros, y especialmente los individuos de la citada Asociación, no pueden oponerle más que débiles argumentos, y son muy pronto confundidos.

Como no es posible descender a pormenores, vamos a limitarnos a una observación de carácter general, aplicable también a otros países.

En la mayor parte de las personas que escriben sobre cuestiones de enseñanza, se da una circunstancia común y es que suelen conocer solamente la literatura escolar *de su propio país*, y desconocen totalmente no sólo las tendencias que pudiéramos llamar paralelas existentes en los demás países, sino también los progresos de la *ciencia* pura en lo que se refiere a la disciplina particular que se estudia aquí, los fundamentos de la Geometría. Esto le ocurre a Dogson que, con la excepción de Legendre, menciona totalmente autores ingleses y no concede la menor

(*) London, 1884-1888.

(**) Segunda edición. London, 1885.

atención a los progresos de la investigación científica, relativos a los fundamentos de la Geometría.

Mucha más influencia que los trabajos de la citada Asociación, han tenido en Inglaterra otras tendencias reformadoras, iniciadas por *John Perry,* ingeniero y profesor de uno de los establecimientos técnicos más importante de Londres. El espíritu de esta nueva reforma se ha manifestado en una lucha a muerte contra el predominio excesivo que se concede a la lógica con el estudio de Euclides, y una tendencia decidida a la sustitución de este sistema de enseñanza por otro basado en el predominio de la intuición. Perry es conocido, sobre todo, como autor del «*Calculus for engineers*» (*), destinado a facilitar a los ingenieros el dominio del cálculo infinitesimal. También es digno de mencionarse, por lo característico para las tendencias de Perry, un folleto titulado *Practical mathematics* (**), cuya publicación fué motivada por unas conferencias para obreros. En él se intenta hacer accesibles el gran público, ciertas ideas como la de función, coordenadas, etc., por medio de su aplicación a casos de la práctica.

No puede decirse que todo esto sea propiamente Geometría, pero en la enseñanza de esta ciencia han influído mucho las ideas de Perry, sobre todo con la aplicación del llamado *método de laboratorio,* que consiste en hacer aprender las cosas por medio de sus *aplicaciones prácticas,* esto es, dibujando y calculando curvas con el auxilio del papel milimétrico, utilizando el planímetro, etc. En este método no intervienen para nada deduciones ni demostraciones lógicas, o, por lo menos, se evitan todo lo más posible; lo único que importa son los *conocimientos prácticos.*

Estas tendencias han sido condensadas en el texto de *Harrison,* «*Practical plane and solid Geometry for elementary students*» (***), que comienza indicando los instrumentos necesarios para el dibujo, papel de dibujo, tablero, un alfiler para marcar puntos, lápiz, etc., y dando algunos consejos prácticos

(*) London, 1897.
(**) London, 1899.
(***) London, 1903.

como el modo de comprobar una regla o una escuadra, etc., y continúa después con la teoría de las figuras planas y del espacio más sencillas, expuestas de un modo empírico e intuitivo, apoyándose siempre en la construcción efectiva de cada figura.

Algo más amplio que este libro es la «*Practical plane and solid Geometry for advanced students including graphic static* (*) de *Harrison y Baxandall*, que siguiendo el mismo procedimiento, llega hasta la Geometría descriptiva y los métodos del cálculo gráfico.

Pueden tenerse referencias bibliográficas más completas en la Memoria de *Robert Fricke*: *Uber Reorganisationsbestrebunger der mathematischen Elementarunterrichts in Englan»* (**), en la que se trata extensivamente de la campaña de Perry. Son también interesantes las Memorias tituladas: *Discusión on the teaching of mathematics* (***), y *Disc. at Johannesburg on the teaching of elementary mechanics* (****), que contienen las discusiones provocadas por Perry en las reuniones celebradas en Glasgow y Johannesburg por la Asociación inglesa para el progreso de las ciencias.

La aplicación de las tendencias de Perry es muy apropiada, especialmente para *escuelas técnicas inferiores y medias*, destinadas a instruir prácticamente a obreros y peritos, pero, en cambio, no lo es para la *enseñanza* superior en general, pues en este caso, el exclusivo predominio de la práctica es insuficiente, ya que no se trata sólo de aprender a medir, dibujar y calcar, sino también de disciplinar la inteligencia y no son de despreciar, por lo tanto, los recursos que la enseñanza matemática puede aportar para el desarrollo de la facultad de pensar lógicamente.

A nuestro juicio la única solución posible consiste en tomar *un camino intermedio entre ambos extremos*, comenzando el estudio de la Geometría por principios intuitivos derivados de la

---

(*) London, 1903.

(**) Jabresbericht der deutscher Mathematiker-Vercinigung, 13. 1904.

(***) London, 1902.

(****) London, 1906.

práctica y tendiendo poco a poco hacia las demostraciones lógicas rigurosas.

Parece que esta idea ha sido acogida por las autoridades docentes de Oxford y Cambridge, como lo demuestran sus últimas disposiciones relativas a los exámenes (*), a las cuales está ajustado el nuevo texto de *Godfrey y Siddons*, titulado «*Elementary Geometric practical and theoretical*» (**). Comienza este libro con una introducción intuitiva o propedéutica geométrica («experimental Geometry») para el primer grado, como es usual en Alemania hace largo tiempo, aunque nuevo en Inglaterra. A esto sigue la *construcción lógica de la Geometría*, de tal modo, que aunque no deja de tener estrechas relaciones con el sistema de Euclides, a veces utiliza ideas nuevas; así, por ejemplo, el área de una figura plana se establece dibujándola primero en papel milimétrico, y contando los cuadraditos que la llenan. Este tratado, que puede considerarse como el prototipo final de la lenta modernización de la enseñanza inglesa, ha tenido una enorme difusión, a causa de la formidable demanda del mercado colonial.

El carácter esencialmente conservador de los métodos ingleses, no ha impedido que algunos autores aislados, desarrollen interesantes concepciones sobre la enseñanza en general, sin pretender por ello cambios en la organización de la misma. Un ejemplo de ello es el litro de *Brandford*; «*A study of mathematical education, including the teaching of Arithmetic*» (***) que contiene interesantes estudios sobre las condiciones psicológicas de la enseñanza, estableciendo un paralelismo entre el desarrollo psíquico de la especie humana en general y el de cada uno de sus individuos, que permite comparar el sentido matemático de un niño con el de los pueblos primitivos.

También es digno de interés «*The first book of Geometry*», de *G. y W. H. Young* (****), en el cual se sigue la idea funda-

---

(*) Regulations of the Oxford and Cambridge Schools-examination board for the year 1904, en cuya página 34, hay un capítulo destinado especialmente a la «Practical Geometry».

(**) Cambridge, 1904.

(***) Oxford, 1908.

(****) London, 1905.

mental de desarrollar el sentido geométrico del niño simultáneamente con su intuición del espacio de tres dimensiones, idea inspirada en la creencia de que limitándose al principio al estudio de las figuras planas, el concepto de espacio no se dibuja con claridad en la mente de los alumnos.

Como medio auxiliar para llevar a la práctica este pensamiento, se utilizan ampliamente los *dobleces en papel,* que con la ayuda de alfileres, permiten construir gran número de figuras planas y del espacio, y hasta obtener demostraciones lógicamente satisfactorias, como, por ejemplo, la del teorema de Pitágoras.

II. La enseñanza en Francia

El cuadro que aquí vamos a presentar es completamente opuesto al que de Inglaterra hemos dibujado. Mientras que los ingleses son rigurosamente conservadores de las viejas tradiciones, el francés ama lo nuevo, y las reformas que produce suelen presentarse con un carácter tan *súbito,* que más bien pueden llamarse revoluciones. También la organización de la enseñanza es distinta. En Francia existe también no sólo una centralización de los exámenes, en gran parte debida a las pruebas de admisión a las escuelas superiores, sino una *organización general de la enseñanza rigurosamente centralizada.* El «Conseil d'instruction supérieure» (que por otra parte, cuenta siempre en su seno matemáticos de primera fila) está dotado de la máxima autoridad y reina en absoluto en la enseñanza, hasta el extremo de que puede, siempre que lo considere conveniente, proponer reformas y cambios, que todos los establecimientos del país tienen la obligación de adoptar. El profesorado no tiene, por consiguiente, la libertad individual a que en Alemania estamos tan acostumbrados. Puede decirse que el sistema francés de organizar, se basa en la *revolución desde arriba.*

La modernización de la enseñanza de la Geometría, es decir, su liberación del rígido método de Euclides, comenzó en Francia muy pronto, hacia el año 1550, y fué un episodio de la lucha formidable entablada por el humanismo moderno contra la vieja escolástica.

Petrus Ramus que, no sólo en la Matemática, sino en otros ramos del saber ocupaba un puesto preeminente entre los apóstoles de las nuevas ideas, escribió por aquellos tiempos un texto de Matemáticas (Arithmeticae, libro 2, Geometricae, libro 27) (*), en el cual se abandona por completo, tanto en la forma como en el fondo, el camino seguido por Euclides. La tendencia de Ramus, explícitamente indicada en el primer libro, es considerar la Geometría como el arte de medir bien («ars bene metiendi»), a causa de lo cual, el *interés práctico* prevalece sobre todas las demás consideraciones. Comienza explicando el modo de ejecutar algunas sencillas mediciones topográficas, describe los aparatos que para ello son precisos, y procura esclarecerlo todo con numerosas e interesantes figuras. También concede un lugar a las deducciones lógicas, pero sin considerarlas como objetivo principal en sí mismas, sino como medio auxiliar para obtener de las propiedades observadas, otras que no son inmediatas, pero sí útiles, para las aplicaciones prácticas; de modo que no llega tan lejos como Perry en la exclusión de los razonamientos.

Este modo de tratar la Geometría se ha conservado en Francia durante largo tiempo. Doscientos años después de Ramus, apareció el afamado libro de *Clairaut,* titulado «*Eléments de Géometrie*» (**). Este *Clairaut* es el mismo que todos conocemos como genial investigador, lo que demuestra que en Francia, al contrario de lo que suele ocurrir en Inglaterra y Alemania, las personas que se distinguen en la investigación, no desdeñan interesarse también por las cuestiones de enseñanza.

La obra de Clairaut se distingue por la brillantez de su estilo, como ocurre con casi todas las que escriben los franceses, que tienen el don especial de presentar agradablemente las cosas, por muy abstractas y enfadosas que sean en sí. Este modo de exponer, absolutamente opuesto al rígido estilo euclídeo, permite que tales tratados se lean *como una novela,* y rompen con la tradicional opinión de que una buena obra científica debe ser lo más pesada posible.

(*) Basilea, 1580.
(**) 1741. Nov. éd., París, 1830.

La Geometría de Clairaut empieza con *problemas prácticos de Topografía* y continúa después, paso a paso, la evolución hacia ideas más generales, aunque sin acentuar nunca demasiado el aspecto lógico. El autor explica en el prólogo los motivos de haber elegido este orden, diciendo que los problemas prácticos de medición de terrenos, fueron los que impulsaron a la humanidad a la formación de una ciencia geométrica, y que, por lo tanto, cualquier persona que comience a estudiar Geometría, encontrará que su interés se despierta más con tales problemas, que si se le presenta un sistema completo de axiomas y teoremas abstractos, cuyo sentido nadie es capaz de comprender tan pronto. Se ve con esto que la intención de Clairaut, fué hacer accesible la lectura de su obra a los no profesionales, propósito muy laudable, porque en aquellos tiempos los estudios matemáticos contribuían a la educación general de las clases directoras en mucho mayor grado que hoy día.

Al finalizar el siglo XVIII comienza una nueva época para la enseñanza, que como todas las actividades sociales se transforma, merced a la *revolución francesa* de 1789. Hasta entonces se había tratado solamente de la formación de las clases superiores de la sociedad con tendencia casi siempre a la carrera militar, pero con la revolución apareció una nueva fuerza, la burguesía, y la enseñanza naturalmente cambió de objeto y de métodos. En su desarrollo son dignas de mencionarse dos direcciones distintas, ligadas a los respectivos caracteres de las dos escuelas superiores que en París fueron fundadas: la *Ecole Polytéchnique* y la *Ecole Normale Superiéure,* destinada la primera a la formación de ingenieros civiles y militares, y la segunda a la del profesorado de enseñanza media.

En la Escuela Politécnica fué el hombre más influyente el célebre *Monge,* cuyas orientaciones en materia de enseñanza geométrica prevalecen todavía en nuestras escuelas técnicas superiores y otras instituciones análogas, sobre todo en los cursos de Geometría descriptiva y analítica. La novedad del método de Monge, consistió principalmente en el establecimiento de ejercicios prácticos ejecutados por los oyentes, que de este modo tomaban una parte activa y personal en el desarrollo del curso. En los contemporáneos de Monge hizo gran impresión ver la primera vez que dirigió estos trabajos prácticos, en las cuales trabajaban más de 70 personas en sus tableros de dibujo. La Escuela Normal, por otra parte, contó entre su profesorado a *Legendre,* autor de los célebres *Eléments de Géometrie,* libro que aparecido por vez primera en 1794, ha ejercido durante largo tiempo una influencia extraordinaria sobre la enseñanza geométrica, pues ha sido, después de los «Elementos» de Euclides, la obra más difundida como libro de texto de Geometría, no solamente en Francia, donde sus repetidas ediciones han llenado el siglo XIX, sino también en otros países, sobre todo en América e Italia. La obra de Legendre significa en comparación con las de Clairaut y Petrus Ramus un gran *retroceso hacia los métodos de Euclides,* puesto que su objeto es presentar un acabado sistema abstracto de Geometría elemental. No obstante, presenta diferencias esenciales con la obra del geómetra griego, las cuales vamos a exponer brevemente en atención al gran significado histórico de la figura de Legendre.

1.° El estilo del libro de Legendre hace agradable su lectura, asemejándose más al de Clairaut que tanto hemos alabado, que al de Euclides, pesado y monótono por su uniformidad.

2.° En lo que se refiere al *contenido* del libro, difiere esencialmente del de Euclides *en el uso consciente que hace de la Aritmética de su tiempo* en la exposición de la Geometría; es pues, un *fusionista* en el sentido que nosotros hemos dado a esta palabra, llegando su fusionismo hasta comprender en su obra también la Trigonometría.

3.° La característica de Legendre comparado con Euclides es que *concede alguna más importancia a la intuición.* Como ya hemos dicho al estudiar la obra del geómetra griego, éste tiene la tendencia de acentuar sobre todo el aspecto lógico, huyendo de la introducción en los razonamientos de consideraciones intuitivas, que solamente al principio se permite establecer, en forma de hechos ciertos o axiomas. Legendre, por el contrario, no desdeña la aplicación de consideraciones intuitivas a la deducción de los teoremas geométricos.

4.° Descendiendo un poco más a los pormenores, debe señalarse como muy interesante la comparación del modo de tratar los *números irracionales* de ambos autores, Euclides, como ya hemos dicho, presenta en el libro 3.°, la noción de número irracional como *logos* o razón de dos magnitudes inconmensurable, y su definición tiene en el fondo gran analogía con la que da la moderna teoría de números irracionales. Los teoremas que dedica a profundizar la esencia del concepto, están demostrados con todo cuidado de satisfacer a las mayores exigencias de rigor lógico (método de exhaustación). Legendre en cambio, no se detiene en tales minucias; toma los números, tanto racionales como irracionales, como ya conocidos por Aritmética, que por otra parte, en aquellos tiempos no estaba tampoco muy sobrada de rigor en lo que a los fundamentos se refiere. No existen tampoco en la obra de Legendre demostraciones por exhaustación; para él es perfectamente claro que todas las propiedades válidas para los números racionales, lo son también para los irracionales, sin necesidad de demostración alguna; defecto común a todos los grandes matemáticos de aquella época, como ya hicimos notar en la primera parte de esta obra con el ejemplo de la «*Théorie des fontions analytiques*», de Lagrange.

5.° A pesar de esta despreocupación de Legendre en lo referente al rigor lógico, no deja de interesarse por las *principales cuestiones de fundamentos de la Geometría*, no solamente siguiendo la tradición euclídea, sino acrecentando con nuevas ideas los conocimientos entonces existentes. En particular, su *teoría de las paralelas* contiene algunas novedades que vamos a indicar, tomando como base para nuestra crítica la primera edición de los «Elements», ya que las posteriores presentan en este punto grandes alteraciones que no son debidas a Legendre.

En otro lugar hemos caracterizado la Geometría euclídea y las no euclídeas por el hecho de la existencia de una, dos o ninguna paralela a una recta por cada punto exterior, pero también pueden caracterizarse por el *valor de la suma de los ángulos de cualquier triángulo rectilíneo*, del siguiente modo: *En la Geometría euclídea esta suma es igual a* π, *en la hiper-*

bólica menor que π *y en la elíptica mayor que* π. Pues bien; Legendre pretende demostrar que las dos últimas posibilidades no pueden darse. Esto que en el fondo es lo mismo que demostrar el axioma de paralelismo de Euclides, lo intenta por medio de una demostración intuitiva en la cual se presupone implícitamente la certeza del citado axioma; la habilidad de Legendre en este punto, es conducir la demostración de tal modo que, ni el lector, ni el autor mismo se dan cuenta de la petición de principio que encierra la demostración.

En lo que concierne a la imposibilidad de la *Geometría elíptica*, la notable demostración de Legendre está basada en *aceptar implícitamente la infinitud de la línea recta.* Ciertamente que esta hipótesis es muy justificada y ni Legendre ni

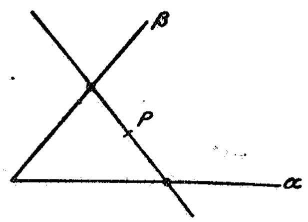

Figura 142

sus lectores podían dudar de su certeza ya que todos los geómetras anteriores a Riemann la han considerado como evidente, pero precisamente la Geometría elíptica muestra que aceptando los demás axiomas resulta admisible la hipótesis de que la recta tenga *longitud finita* sin más que admitir que es ilimitada y, por tanto, cerrada. Así, pues; la hipótesis de la recta infinita está sólo fundada en un hecho intuitivo independiente.

Análogamente, para excluir la posibilidad de la Geometría *hiperbólica,* Legendre utiliza, sin advertirlo expresamente, otro hecho intuitivo, del cual no puede dudar nadie que no haya profundizado en los estudios geométricos, y que es el siguiente (fig. 142). *Si* P *es un punto situado dentro del ángulo de dos semirrayos* α, β, *siempre puede trazarse por* P *una recta que corte a* α *y* β. Apoyándose en esto, demuestra con todo rigor que la suma de los ángulos de un triángulo no puede ser menor que π, con lo cual queda como única posible la *Geometría euclídea.*

Vamos a probar que este hecho intuitivo no tiene lugar en la Geometría hiperbólica. Sean α y β (fig. 143), dos rayos de esta Geometría que parten del punto O, el cual, naturalmente, debe estar situado dentro de la cónica fundamental $\Phi=0$. Las paralelas a α son rayos que han de pasar por el punto de intersección de α con la cónica (es decir, por el punto del infinito de la recta α). Como lo mismo puede decirse de la β, es evidente que existe una recta γ paralela al mismo tiempo a α y β, que es la que une sus respectivos puntos de intersección con la cónica $\Phi=0$, cosa que naturalmente no puede ocurrir en la Geometría euclídea. Si tomamos ahora un punto P fuera

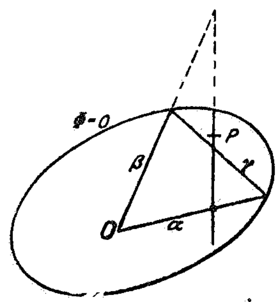

Figura 143

del triángulo formado por α, β y su paralela común γ, aunque dentro de la cónica fundamental, el hecho en que Legendre se apoya, no se verifica ya. En efecto, toda recta que pase por el punto P, cortará a una de las dos rectas α, β, dentro de la cónica, y a la otra fuera de ella; es decir, traduciendo el hecho al lenguaje de nuestra Geometría, no cortará a esta otra recta.

Después de esta digresión sobre algunas particularidades de la obra de Legendre, vamos a continuar en nuestro estudio del desarrollo de la enseñanza matemática en Francia. Es digno de notarse que en este país, la organización escolar apenas si ha cambiado durante el siglo XIX, habiéndose conservado en ella, como en casi todo lo referente a la cultura, la tradición napoleónica. En la enseñanza geométrica se ha conservado el libro de Legendre, aunque modificándolo cada vez más en las ediciones sucesivas, en el sentido de *limitar todo lo referente a aplicaciones prácticas*. Si bien Legendre no concede al arte de medir la extraordinaria atención que le dedicaron Clairaut y Ramus, tampoco la menosprecia, como lo prueba la importancia que en su obra toma el cálculo numérico. En las ediciones posteriores, todo lo relativo a estas cuestiones va siendo más reducido, incluso la Trigonometría que Legendre coloca en estrecha relación con la práctica. Un ejemplo característico es el llamado *teorema de Legendre* en Trigonometría esférica que se enuncia del siguiente modo:

En todo triángulo esférico de lados a, b, c, y ángulos α, β, γ (fig. 144), el *exceso esférico* $E = \alpha + \beta + \gamma - \pi$, es siempre

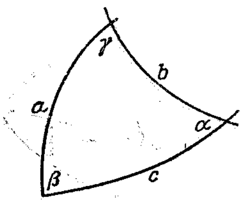

Figura 144

positivo. Si los lados del triángulo son suficientemente pequeños en relación con el radio de la esfera (por ejemplo, si en la tierra no son mayores de 100 kilómetros), *el triángulo esférico puede sustituirse prácticamente con exactitud suficiente por el triángulo plano cuyos ángulos sean*

$$\alpha - \frac{E}{3}, \quad \beta - \frac{E}{3}, \quad \gamma - \frac{E}{3}$$

Este teorema que Legendre demuestra muy sencillamente tomando los primeros términos de los desarrollos en serie de las funciones que intervienen en las fórmulas trigonométricas tiene gran aplicación en la práctica geodésica, no obstante lo cual ha sido suprimido en posteriores ediciones del libro.

Junto a las tendencias representadas por la obra de Legendre, existe otra, de la cual puede considerarse como libro tipo el más completo, el *Traité de Géometrie de Rouché* y *Comberousse*. En Francia, los estudios que preparan para el ingreso en las Escuelas superiores, son mucho más fuertes que entre nosotros y en vez de pasar directamente desde la segunda enseñanza, los alumnos necesitan seguir el curso llamado *Classes de Mathématiques spéciales* durante dos años, con *dieciseis horas semanales* de matemáticas como mínimo. Como consecuencia de ello, se imponía la necesidad de agregar *nuevas materias* a los libros de texto y a esta necesidad responde el de Rouché y Comberousse que está ampliado con numerosas notas sobre Geometría no euclídea, Geometría del triángulo y del tetraedro, teoría de las curvas y superficies más importantes y otras muchas materias.

A partir del año 1900 ha empezado a operarse en Francia un *movimiento de reforma en la enseñanza matemática,* análogo en todo al que se ha producido en Alemania, y que podemos calificar como motivado por el cambio de tendencia general de la cultura en esta época. A causa del crecimiento monstruoso de la industria y del comercio, ha sido preciso orientar la enseñanza en el sentido de no limitarse a los conocimientos teóricos, sino conceder por el contrario una gran importancia a aquéllos que sean inmediatamente utilizables en la práctrica. No puede calificarse a los iniciadores de este movimiento como meros utilitaristas, puesto que el objeto que se proponen, tiene una excepcional importancia educativa, como medio de poner de manifiesto en cada caso, la aptitud personal para las diversas profesiones.

Como detalle característico, es digno de hacerse notar que la idea de la reforma nació en las controversias de la Cámara de los Diputados, de cuyo seno salió una comisión que asesorándose de un gran número de corporaciones oficiales, llegó a redactar un luminoso informe sobre la reforma de la enseñanza media en general. En lo concerniente a la Matemática los nuevos puntos de vista son *simplificar y hacer más intuitiva la enseñanza e introducir en los planes de estudios algunas materias que hasta entonces se consideraban dentro de la Matemática superior* y que no solamente son fácilmente accesibles, sino, sobre todo, que tienen gran importancia para las ciencias naturales y para la técnica, como el *concepto de función,* la *representación gráfica* y las *nociones de Cálculo infinitesimal.* Con ello también se aspira a una *fusión más íntima entre la Aritmética y la Geometría.*

Esta reforma ha sido incluída en el plan de estudios de 1902 (*), y puesta en práctica inmediatamente, habiendo contribuído a la diligencia en implantarse, la mencionada centralización de la Instrucción pública en Francia, que permite efectuar un cambio radical con una simple orden de la autoridad docente. El estudio completo del desarrollo de la reforma está contenido en la obra de *Schimmack,* «*Vorträge über den mathematischen Unterricht an den hören Schulen* (**), en la que pueden encontrarse toda clase de datos sobre la organización general de la enseñanza matemática, que completan los que aquí exponemos concernientes a la de la Geometría. Los libros de texto a que el nuevo plan de estudios ha dado origen, presentan profundas diferencias con la Geometría elemental al estilo de Euclides. Uno de los más interesantes es la *Géométrie* de *Borel* (***), en el cual las materias están sencilla y conscientemente ordenadas, concediéndose además una gran importancia a las aplicaciones prácticas.

También es digna de señalarse la aparición de una obra que representa ideas completamente opuestas, y que expone un sistema geométrico sujeto en absoluto a las exigencias de la lógica, como el de Euclides. Este libro, sumamente significativo, se titula *Nouveaux Eléments de Géometrie* y su autor

(*) Plan d'études et programmes d'enseignement dans les lycées et colléges de garçons. París, 1903.

(**) Von der Organisation des Mathematischen Unterrichts. Leipzig, 1907.

(***) París, 1905.

es *Carlos Méray,* que publicó la primera edición en 1874, pero sin conseguir llamar la atención hasta estos últimos años en que ha tenido una gran resonancia (*). Méray no utiliza en sus demostraciones ningún hecho intuitivo que no haya sido previamente formulado en forma de axioma, desarrollando así *un sistema axiomático completo de Geometría.* Sin embargo, procura satisfacer las exigencias de la enseñanza, no pretendiendo como los euclídeos que los axiomas sean el mínimo posible independientes entre sí, sino formulando cada proposición axiomática en el momento que la necesita.

También son cualidades características de Méray, el llevar la *fusión de Planimetría y Estereometría* tan lejos como le es posible, y el utilizar, al contrario de Euclides, la *noción de grupo de movimientos* de un modo consecuente, basando en ella todo el desarrollo de su Geometría. Las ideas de rotación y traslación expuestas al principio del libro, le proporcionan, la primera, los conceptos de perpendicularidad, circunferencia, etc., y la segunda el de paralelismo. Además de todo esto, tiene la obra de Méray otros méritos, como por ejemplo, el rigor con que procede siempre en el *paso al límite,* y la aplicación del *moderno concepto de número* exactamente formulado, aunque en ello no vaya tan lejos en la fusión con la Aritmética, como aquí lo hemos hecho nosotros. La obra de Méray ha ejercido una gran influencia sobre los libros de texto franceses. Así, la noción de movimiento desempeña un gran papel en el citado libro de *Borel* y mayor aún en los nuevos «*Eléments de Géométrie*» de *C. Bourlet,* en cuya obra se tratan explícitamente los grupos de movimientos, considerando los conceptos geométricos como invariantes de ellos.

III. La enseñanza en Italia

Vamos a tratar únicamente de las reformas de la enseñanza ocurridas en la Italia moderna, o sea, a partir del año 1860 aproximadamente. Las ideas fundamentales que las han oca-

(*) Nouv. éd. Dijon, 1903. 3 éd., 1906.

sionado son muy distintas de las predominantes en Francia e Inglaterra y solamente pueden colocarse en paralelismo con las de Méray.

Uno de los hombres que más han influído en la modificación de la enseñanza italiana ha sido *Cremona*, de todos conocido por sus brillantes investigaciones científicas en el campo de la Geometría moderna, enriquecido por él con la *creación de la Geometría algebraica*, que tan espléndidos resultados ha producido. Como consecuencia de su actuación científica, Cremona ha influído también en la enseñanza superior, colocando en lugar preferente la *Geometria proyectiva en unión con la descriptiva y la Estática gráfica*. Los ingenieros de todo el mundo hablan del *diagrama de fuerzas de Cremona* y aunque esta denominación no está justificada históricamente, demuestra la importancia de la obra del ilustre profesor.

La influencia de Cremona en la enseñanza media se ha manifestado en otro sentido muy diferente. En un famoso informe de 1867 recomienda el Euclides, aunque no refiriéndose al orden y selección de materias, sino al espíritu de la obra, que es establecer un sistema geométrico lógicamente riguroso, lo cual, según Cremona, es muy apropiado para la segunda enseñanza. En cambio, en su actuación como profesor, parece que concede más importancia al aspecto intuitivo (*), siendo muy de extrañar esta contradicción entre tan distintos puntos de vista.

Las ideas de Cremona han sido de fructíferos resultados, pues a partir de 1867 todos los matemáticos italianos se han esforzado por crear libros de texto que sustituyan al de Euclides mejorándolo, es decir, conservando su espíritu y las mismas materias, con la única diferencia de llevar al más alto grado las exigencias lógicas. Lo mismo que en Francia, han tomado parte en este trabajo grandes matemáticos, que han producido obras de alto valor científico, aunque sus cualidades pedagogicas no sean muy grandes. Los detalles de este movimiento reformador pueden encontrarse en un folleto de *W. Lietz-*

(*) Véase, por ejemplo, Cremona. Elementi di Geometría proiettiva.

mann (*); nosotros nos limitaremos a hacer resaltar sus principales características.

En primer lugar, es digna de mencionarse la *traducción de Euclides* publicada en 1867 por *E. Betti* y *F. Brioschi* (**), a la cual es debida la difusión del conocimiento de Euclides en Italia. Contiene exactamente igual que los textos ingleses, los libros 1 al 6, el 11 y el 12, pero en cambio no conserva la forma primitiva de la exposición, sino que por el contrario, está adaptada al objeto de desarrollar en el alumno el espíritu de investigación científica.

Otros de los libros de texto publicados en Italia, se ajustan casi por completo al esquema euclídeo de definiciones, teoremas, etc., pero tienen el mérito de mejorarlo, formulando de un modo preciso todos los hechos intuitivos de que Euclides hace uso implícitamente. Para llenar las lagunas del libro primero de los «Elementos», en la mayoría de estas obras suele utilizarse la *noción de movimiento,* formulándola de un modo explícito e incluyendo una serie de *axiomas del movimiento* en el sistema general de axiomas que encabeza la Geometría. Los autores de tales libros, coincidiendo con Méray en apreciar la importancia de las exigencias pedagógicas, no se preocupan de la independencia de los axiomas, ni de reducir su número al mínimo posible. La obra típica de este grupo es los «*Elementi di Geometria* de *A. Sannia* y *E. d'Ovidio* (***), aparecida por primera vez en 1869, y en la cual se encuentra aproximadamente la misma materia que en el Euclides, aunque facilitada en cierto modo. La noción de número, tal como la proporciona la Aritmética pura, es evitada en todo momento, pero en cambio se prepara el estudio del método de exhaustación con la noción de límite, lo cual no hace Euclides. La Planimetría y la Estereometría están separadas por completo, a pesar de que los autores cuentan con que el libro sea utilizado en las escuelas en sentido fusionista. Efectivamente en Ita-

(*) Die Grundlagen der Geometrie im Unterricht (mit besonderer Berücksichtigung Italiens) Zeitschrift f. math. u. naturw. Unterricht (1908), página 177.

(**) Gli Elementi di Euclide, 36. Ristampa. Firenze, 1901.

(***) Vol. I. II. 11ᵉ éd. Napoli, 1904.

lia se ha extendido mucho la tendencia a la fusión entre Geometría plana y del espacio, siendo uno de los libros más difundidos los «*Elementi di Geometria*» de *R. Paolis* (*) que tiene esta característica.

Existe *otro grupo de libros de texto* más numeroso que el anterior, también de tipo euclídeo, pero con la aspiración de llevar el *rigor y la precisión al más alto grado*. Los autores de este segundo grupo opinan que los conceptos fundamentales no están definidos en Euclides con suficiente rigor, y pretenden aumentarlo comenzando la exposición de la Geometría con un *concepto único*, el de punto, con el cual se construyen todos los demás de un modo rigurosamente lógico.

Como característica de esta manera de concebir el desarrollo de la Geometría, es digna de hacerse notar la *exclusión sistemática* de la noción de *movimiento*.

Entre las obras de este carácter, una de las mejores es la de *Veronese*, formada por varios tomos que abarcan la totalidad de la Geometría. Claro es que no pretendemos incluir en ella su obra dedicada a la exposición en forma abstracta del problema científico de la Geometría multidimensional y «no arquimediana». Lo que realmente nos interesa son los libros de Veronese dedicados a la enseñanza media, que llevan por títulos «*Nozioni elementari di Geometria intuitiva*» (**) y «*Elementi di Geometria*» (***). El primero de ellos es una *introducción inductiva*, destinada a proporcionar al alumno un conocimiento intuitivo de las diversas formas geométricas. La *enseñanza sistemática de la Geometría* se comienza realmente muy tarde en Italia, siendo la edad de los alumnos aproximadamente la misma que la de los estudiantes de Sekunda (****), en Alemania.

(*) Torino, 1881.

(**) Segunda edición. Verona, 1902.

(***) Aparecido en diversas ediciones destinadas a los Liceos y Gimnasios, Escuelas Normales, etc. Con la colaboración de P. Gazzaniga, P. I. II. Ed. III. Verona, 1904.

(****) En Alemania la Klasse Sekunda es el penúltimo grado de la segunda enseñanza y comprende dos cursos Untersekunda, o segunda inferior y Obersekunda o superior. Los alumnos suelen estar en Sekunda entre los 14 y 16 años de edad. (N. del T.)

Los «*Elementi*» de Veronese contienen un desarrollo teórico de la Geometría, en el cual todos los postulados de ésta están enunciados explícitamente, aun cuando sean evidentes; así por ejemplo, no se olvida de afirmar que *existen varios puntos,* es decir, que no se va a estudiar la Geometría de un solo punto. La observación empírica que podría servir como principio eurístico que dirigiese la enunciación de axiomas es reducida al mínimo; para ello se utiliza como forma geométrica fundamental el *segmento rectilíneo* definido como sistema de puntos que satisfacen a determinadas condiciones. De la congruencia de segmentos, considerada como noción primitiva, resulta la congruencia de las figuras de un modo sumamente original; así, dos triángulos son congruentes, cuando lo son los segmentos que los forman, con lo cual resulta de paso la congruencia entre los ángulos (es decir, *el tercer caso de igualdad de triángulos se considera como un postulado*).

La *teoría del paralelismo* comienza del modo siguiente: dos rectas se llaman paralelas, cuando son simétricas respecto de un punto, es decir, cuando determinan segmentos iguales en las rectas que pasan por dicho punto. En lo que concierne a la cantidad y selección de materias, Veronese se mantiene en los mismos límites que el tratado de Euclides, evitando con sumo cuidado apoyarse en la Aritmética. Lo mismo ocurre con otros libros italianos como los «*Elementi di Geometría*» de *F. Enriques* y *U. Amaldi* (*), aunque esta obra está escrita teniendo en cuenta mucho más que la de Veronese, las exigencias pedagógicas.

Existen también otros tratados que acentúan aún más el método abstracto de Veronese, influídos sus autores por las ideas de la escuela de *Peano*. Este profesor opina que la Matemática debe ser establecida de un modo rigurosamente lógico, prescindiendo en absoluto de todo elemento intuitivo, con más rigor aún del que se usa en las investigaciones de carácter axiomático hechas hasta ahora. Para conseguir la realización de estas aspiraciones, ha creído necesario crear un lenguaje especial, constituído por signos, pues, según él, las pa-

(*) Segunda edición. Bologna, 1905.

labras del lenguaje ordinario hacen que se introduzcan inadvertidamente en el razonamiento, elementos extraños a la lógica; el ideal es, por lo tanto, *operar con signos desprovistos de todo significado y según reglas «arbitrarias»* que tampoco tengan en sí ninguna significación. Peano ha fundado una escuela muy difundida e influyente en Italia, y se ocupa en escribir en colaboración con discípulos un *formulario*, en el cual esté representada toda la Matemática, o mejor dicho, su contenido lógico puro, en el lenguaje simbólico por él inventado.

Cabe ahora la duda, de si será *preciso* para el progreso científico, acentuar con tanta intensidad el aspecto lógico de la Matemática. Establezcamos, para resolverla, una sencilla comparación. Cuando se asciende a una montaña se va notando que la pureza de la atmósfera aumenta en cada momento; pudiera, pues, creerse que si se ascendiese indefinidamente el bienestar que se experimenta, sería cada vez mayor. Todo el mundo sabe, sin embargo, que esto no ocurre, sino que, por el contrario, existe un límite de altura, pasado el cual, la vida humana se hace imposible. Análogamente puede decirse, que en la ascensión de los lógicos hacia la pureza científica eliminando la intuición (en lo posible, pues aun los símbolos de Peano contienen un resto de elementos intuitivos), se encuentran innegables ventajas, pero sólo hasta un cierto límite, que no puede ser sobrepasado, sin que el excesivo predominio de la lógica sobre la intuición, produzca la esterilidad del razonamiento.

Es natural que en la *investigación pura* se aprovechen todas las tendencias e iniciativas; pero, ciñéndose al punto de vista de la *pedagogía*, es forzoso reconocer, que la mayoría de los alumnos sometidos a un método demasiado abstracto de enseñanza, no aprenden nada, y los pocos que aprenden, no llegan a conocer todo lo que después han de necesitar. Tan verdad es esto, que en Italia misma se ha producido un movimiento de reacción contra la enseñanza exageradamente abstracta, movimiento que ha alcanzado a las escuelas superiores, campo en el que la influencia de los lógicos puros se dejaba sentir con más rigor. Como ejemplo de lo que en estas Escuelas era la enseñanza baste decir que en ciertas lecciones para futuros ingenieros, el teorema de Taylor se explicaba primero para un número cualquiera de variables, estudiando después el caso particular en que la variable fuera sólo una. Tales exageraciones han dado lugar a muchas quejas sobre la mala formación matemática del promedio de los estudiantes, ya que el número de los que pueden llegar a las grandes abstracciones es muy escaso.

En el campo de la *enseñanza media* italiana, se ha señalado también en los últimos años un *movimiento de reforma*, que coincide en todo con las tendencias alemanas y francesas de emanciparse de la tradición euclídea y conceder menos importancia a la lógica abstracta, acentuando, en cambio, el *aspecto intuitivo*. Los medios empleados para conseguirlo, consisten en introducir en los programas las deas fundamentales de la Matemática moderna (*concepto de función*) y en conceder gran importancia a las aplicaciones prácticas. El representante de este movimiento de renovación es *Gino Loria*, que informó en el tercer Congreso internacional de Matemáticas de Heidelberg, sobre el estado de la enseñanza en Italia (*) y que expuso sus ideas de reforma en una notable conferencia pronunciada en la Asociación de profesores italianos «Mathesis». Esta Asociación es un testimonio vivo del interés que las nuevas ideas han despertado en los círculos docentes italianos, y aunque el último plan de estudios (**) presenta sólo escasas innovaciones, no es aventurado esperar que las escuelas medias italianas, sabrán liberarse pronto del yugo de la lógica extremada y organizar la enseñanza en una forma más moderna.

IV. La enseñanza en Alemania

Bajo este título, comprendemos el estudio de las transformaciones de la enseñanza matemática en todos los países de habla germánica, es decir, en Alemania, Austria y Suiza.

(*) Verhandlungen des 3er. internationalen Mathematiker Kongress. Leipzig, 1905, página 594.

(**) Istruzioni e programmi vigenti nei gymansi e licei. Torino, 1905.

El desarrollo de la enseñanza de la Geometría, presenta en Alemania características muy diferentes al de otros países; ante todo, puede observarse que falta en él *la unidad,* debida en otros Estados a la organización centralista. No solamente en cada Estado de los que constituyen el Imperio Alemán se han marcado tendencias propias, sino que cada establecimiento docente, y aun cada profesor ha disfrutado en virtud de la organización descentralizada, de un amplio campo en que desarrollar sus propias iniciativas. Así ha ocurrido que multitud de tendencias procedentes de diversos orígenes, han podido ensayarse particularmente, antes de que en los planes oficiales de enseñanza se les concediese la menor atención.

Solamente vamos a ocuparnos aquí de los acontecimientos ocurridos en los últimos decenios (aproximadamente desde 1870) remitiendo a los que deseen hacer un estudio completo de la cuestión, a la obra de Klein-Schimmack ya citada en otro lugar.

El incremento de las necesidades de cultura, que en todas las clases sociales se ha notado desde el año 70, ha exigido una transformación de la enseñanza en el sentido de popularizarla lo más posible. La repercusión de este hecho en la enseñanza matemática, ha hecho reconocer la necesidad de *conceder una gran importancia a la intuición inmediata,* orientando los métodos hacia el estudio de objetos reales y bien conocidos por los alumnos. Estas tendencias proceden, como es sabido, del célebre pedagogo suizo *U. Pestalozzi,* en cuya persona debe verse el creador de la enseñanza elemental, tal y como hoy día se practica. Algunas de sus publicaciones, todas de gran interés, se refieren especialmente a la Matemática; tales son: *Das A B C der Anschauung, oder die Auschauungslehre der Massverkälinisse*» (*) y «*Die Auschauungslehre der Zahlenverhältnisse*» (**), que muestran la posibilidad de iniciar a alumnos que carezcan de toda preparación, en los hechos más sencillos de la intuición espacial y numérica. Ciertamente, que el que pretenda encontrar en estos libros

(*) En dos cuadernos Zürch-Tübingen, 1803.
(**) En tres cuadernos Zürich-Tübingen, 1803-4.

alguna agradable síntesis, quedará defraudado, pues ambos son de lectura pesada y fastidiosa, debido a que presentan las relaciones más triviales posibles, tanto aritméticas como geométricas, en inacabable serie, todo ello detallado de la manera más minuciosa. Como ejemplo que justifica esto que decimos, véase el siguiente: Para hacer comprender a un niño, que un cuadrado puede dividirse en partes iguales por medio de rectas horizontales y verticales (fig. 145), Pestalozzi, no solamente hace una tabla con todas las 100 combinaciones posibles de división por 0, 1, ..., 9 horizontales y verticales, sino que explica en el texto, el número y posición de todos los rectángulos y cuadrados resultantes en cada caso particular. Se debe entender, sin embargo, que la intención de Pestalozzi, era proporcionar a los maestros poco diestros una numerosa colección de ejemplos, seleccionando los cuales, pudieran basar su enseñanza oral.

Con objeto de aumentar la difusión de estas ideas, el filósofo de Gotinga *Herbart*, escribió un folleto titulado «*Pestalozzis Idee eines A B C der Anschauung*», en el cual se exponen de un modo más esquemático, y, por tanto, más interesante. En este folleto, para dar a conocer a los niños las formas posibles de un triángulo, Herbart construye una tabla, en la cual de 5 en 5 grados se dan los valores de los ángulos del triángulo, y de los formados por la altura con los lados concurrentes con ella (fig. 146). La tabla está destinada a su com-

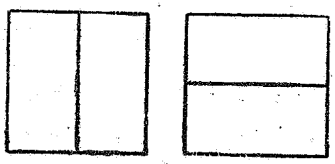

Figura 145

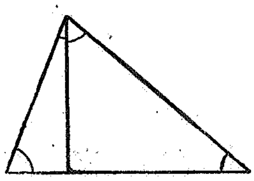

Figura 146

probación por medio de medidas directas sobre triángulos. No deja de ser curiosa esta manera de hacer conocer las diferentes formas de un triángulo, por medio de una tabla, al mismo tiempo que se colocan directamente ante los ojos.

Pestalozzi y Herbart ejercieron sobre la enseñanza una influencia tan poderosa que aún perdura, como lo demuestran la mayor parte de los tratados de Geometría del espacio para escuelas populares, en los que se encuentran huellas inequívocas de las ideas de Petalozzi. Otro ejemplo, son los *Kindergärten* debidos a *Fröbel*, en los cuales los niños pequeños llegan a conocer las formas espaciales más sencillas, por medio de juegos con objetos apropiados. Tampoco en las escuelas superiores ha dejado de penetrar la influencia de estas ideas pedagógicas. Como característica demostración de este hecho, puede citarse el *plan de estudios* redactado para Austria, hacia el año 1850, por *Exner* y *Bonitz*. En el cambio de orientaciones ocurrido en dicho país, tuvieron gran influjo los acontecimientos políticos, pues al perder su importancia las numerosas órdenes religiosas católicas, en virtud de la revolución de 1848, el método dogmático medioeval que empleaban todavía en la enseñanza matemática, fué abandonado por completo.

Hoy día en Austria, el desarrollo de la intuición espacial se considera no solamente como preparación indispensable para un estudio más profundo, sino *en sí mismo, como objetivo independiente*. En los grados inferiores de la enseñanza media (cuatro años) se prescinde en absoluto de consideraciones lógicas, y se pretende solamente que los alumnos lleguen al *conocimiento intuitivo de las figuras por medio del dibujo*.

La práctica de éste no se abandona en los grados superiores, a pesar de que en ellos se presta más atención a la lógica.

Estas tendencias comenzaron a difundirse en Prusia y, en general, en la Alemania del Norte, desde el año 1870, debido principalmente a la actuación de Bonitz en el Kultusministerium de Prusia. Las bases de la reforma fueron formuladas en el *plan de estudios de* 1882, en virtud del cual, se creó un *curso geométrico preparatorio en la clase quinta* (*) con el objeto de proporcionar a los alumnos un conocimiento intuitivo de las cosas, que luego sirva de base al edificio geométrico. El desarrollo de la enseñanza matemática por este camino, puede es-

(*) En los establecimientos alemanes de segunda enseñanza, los distintos grados se numeran empezando por el último; así, pues, la clase quinta es el tercer curso de los nueve que comprende el Bachillerato.

tudiarse además de en el citado libro de Klein-Sckimmack, en el folleto titulado «100 *Jahre mathematischen Unterricht in der höheren preusisschenSchulen* (*). En cuanto a libro de texto que siga las nuevas tendencias, puede mencionarse el de *Holzmüller «Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik»* (**). El título tiene ya de característico, el empleo de la palabra *metódico* en vez de usar la voz *sistemático,* lo cual indica que sigue un orden más adaptado a las condiciones de los alumnos, que a la naturaleza de la disciplina expuesta.

Además, no se trata de un libro de Aritmética ni de Geometría por sí solas, sino que comprende *la totalidad de la Matemática elemental,* distribuída en capítulos, ya de Aritmética, ya de Geometría, convenientemente alternados para que se note bien la conexión íntima entre ambas. No sólo se basa la Geometría en el *dibujo* y *construcciones,* sino que el libro recomienda no limitarse a reconocer la posibilidad de una construcción, sino proceder a *ejecutarla con toda limpieza y exactitud.* Frecuentemente se enuncia un teorema geométrico como resultado de una construcción práctica; así, por ejemplo, los teoremas de congruencia de triángulos se derivan del hecho, de que dados tres segmentos, el triángulo que con ellos puede construirse es único.

Uno de los méritos del libro de Holzmüller es contener algunos *elementos de Geometría proyectiva* y el único defecto prescindir demasiado de la lógica, pero esto es muy natural, pues siempre se exagera en un sentido o en otro, siendo muy difícil mantenerse en el justo medio.

La aplicación de estas ideas en la enseñanza matemática, ha tenido positivos resultados, pero no por ello se ha detenido la transformación iniciada.

Una nueva tendencia que ha comenzado a dibujarse en

(*) De autor Klein, publicado en *W. Lexis,* Die Reform des höheren Schulwesens in Preussen, Halle, 1902. Reproducido en Jahresbericht. d. D. M. V., tomo 13.º, 1904, página 347 y siguientes, y en *Klein* u. *Ricke,* Neue Beiträge zur Frage des math. u. physik. Unterrichts an höheren Schulen, Leipzig, 1904, página 63 y siguientes.

(**) En tres partes. Leipzig (Teubner), 1894-95. Numerosas ediciones posteriores.

1890, consiste en no prescindir de las *aplicaciones de la Matemática a todas las ramas de las Ciencias naturales y técnicas,* así como de su *significación en la vida real.* De este modo se añade algo nuevo a la mera aplicación de los procedimientos intuitivos, pues en vez de utilizarlos con un objeto puramente formal, se aprovechan para hacer adquirir al alumno conocimientos indispensables en la práctica de la vida. En relación con estas ideas, están las proposiciones de reforma que tienen por base la introducción en la segunda enseñanza del *concepto de función, los métodos gráficos y elementos de Cálculo infinitesimal.*

Existen otras tendencias modernas con las cuales debieran estar más familiarizados de lo que lo están los matemáticos, y que vamos a enunciar brevemente.

a) Es conveniente conocer *ciertos resultados de las modernas investigaciones psicológicas,* especialmente de la Psicología experimental y de la *Higiene moderna.* Herbart tuvo ya la pretensión de basar la Pedagogía en la Fisiología, pero la solución del problema lleva derroteros completamente distintos, desde que esta última Ciencia está en posesión de métodos experimentales exactos.

Imagínese la importancia de la investigación de la *memoria* en Pedagogía; lo importante que es, por ejemplo, saber de qué modo se graban los hechos en la memoria y en ella se conservan y cómo depende todo ello del medio ambiente ó de la personal disposición de cada individuo; lo mismo ocurre con el problema de la *fatiga,* después de sometidos a un trabajo intelectual o material.

Uno de los problemas relacionados con estos estudios, que más debe interesar a los matemáticos, es la *diferenciación de la aptitud individual.* Durante mucho tiempo, se ha afirmado que existían muy pocos alumnos aptos para la Matemática, y que éstos únicamente podían comprender algo, mientras que los restantes no obtenían absolutamente ningún resultado. La causa de que esta opinión estuviese tan difundida, era lo defectuoso de los métodos empleados entonces en la enseñanza matemática; así, cuando estos han sido modificados en el sentido de conceder más importancia al arte pedagógico, la citada creencia ha desaparecido. En cambio, la reacción producida ha dado pábulo a que se crea lo contrario, es decir, que todo alumno de buena voluntad y bien dirigido, puede aprender algo de Matemática. Es evidente, sin embargo, que existen muchas personas inteligentes que carecen en absoluto de aptitud para la Matemática. El autor de estas conferencias, ha tenido ocasión de oír al célebre arquitecto berlinés Messel, creador del famoso edificio de los almacenes Wertheim, quejarse de las fruslerías matemáticas con que se atormenta a los escolares, y que, para él, carecen absolutamente de significación. Quizás fuese más cuerdo permitir a las personas dotadas de tal temperamento hacer sus estudios prescindiendo de la Matemática, que esforzarse en hacerles adquirir algunos conocimientos de ella, pues en la mayor parte de los casos, no se consigue otro resultado que despertar en ellos una profunda aversión hacia la Ciencia, que no pueden comprender. Claro es que esto puede referirse solamente a aquellos individuos que dotados de buena inteligencia y bien dirigidos, no pueden, sin embargo, aprender nada de Matemática, pero nunca a aquellos otros que por comodidad o pereza contribuyen a justificar la antigua creencia de la *incapacidad general para los estudios matemáticos.*

Otros importantes problemas que ha de resolver la Psicología, se refieren a las *sutiles diferencias cualitativas que existen entre las aptitudes matemáticas de los diversos individuos,* lo cual tiene gran interés no solamente en lo que respecta a la producción científica, sino también para la Pedagogía. No todos los matemáticos trabajan del mismo modo, pues mientras unos lo hacen abstracta y aritméticamente, otros prefieren operar con imágenes intuitiva o geométricas. También si se examina psicológicamente a los calculadores rápidos, jugadores de ajedrez, etc., se encuentran entre ellos grandes diferencias; así, por ejemplo, hay calculadores que ejecutan su trabajo imaginando colocadas las cifras ante su vista (tipo visual), mientras que otros fundan sus asociaciones de ideas en los sonidos de los nombres de las cifras (tipo auditivo) (*).

(*) Véase a este respecto: *Binet, Psychologie des grands calculateurs et joueurs d'échec*, París, 1804.

b) Paralelamente á las modernas ideas sobre la enseñanza matemática, se ha desarrollado también una nueva tendencia en la *educación artística* y *enseñanza del dibujo*, tomando como objetivo principal la *comprensión intuitiva de los objetos* en vez de comenzar procurando el estudio minucioso de los detalles, como antes se hacía. Durante muchísimo tiempo, se ha enseñado el dibujo colocando ante el alumno una lámina de muestra, y haciéndosela copiar con la mayor exactitud posible. Hoy día, por el contrario, el discípulo recibe pincel y colores y con ellos se dedica a reproducir, según sus propias impresiones, objetos sencillos y usuales, colocados ante su vista o recordados por él. No se concede ninguna importancia a la reproducción fiel de los detalles, consistiéndose que se dibujen con la mayor inexactitud, con tal que la impresión del conjunto sea verdadera. Este método ha producido maravillosos resultados, encontrándose en las exposiciones escolares trabajos excelentes, ejecutados incluso por alumnos de escasa aptitud artística.

Esta tendencia está evidentemente *en contraposición con el dibujo matemático*, que es todo exactitud y minuciosidad, pero este contraste solamente podría tener importancia si se practicase uno de los dos métodos con exclusión absoluta del otro, como ocurre algunas veces en Geometría descriptiva, donde después de haber hallado con gran trabajo muchos puntos de una curva, al unir unos con otros, no se obtiene, a causa de la poca destreza del dibujante, más que una maraña confusa, absolutamente inútil para cualquier objeto. Lo mismo ocurre en el caso opuesto. Existen dibujos que parecen caricaturas, pues sus detalles son tan confusos, que solamente colocándose a alguna distancia puede apreciarse algo de lo que el autor quiso representar. En cambio, si ambos métodos se practican a la vez de un modo bien comprendido, pueden completarse mutuamente y producir excelentes resultados de gran interés, incluso para la Matemática (*).

(*) Véase el folleto de *Schilling* «*Ueber die Anwendungen der darstellende Geometrie*», cuaderno 3.° de la colección «*Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Untrrichts an höheren Schulen*», publicada por Klein y Licke. Leipzig-Berlín, 1904.

En este orden de ideas, merece también citarse la crítica que el célebre filósofo *Schopenhuer* hace de la Matemática por ser característica su hábil enemiga contra la ciencia matemática. Schopenhauer considera que la serie de particularidades lógicas que contiene una demostración es suficiente e inaceptable y quisiera mejor poder convencerse de la verdad de un teorema intuitivamente y al primer golpe de vista, para lo cual considera conveniente que toda demostración lógica, vaya acompañada de otra preliminar en la que entren solamente elementos intuitivos. Este punto de vista expuesto por Schopenhauer en su obra maestra (*), le lleva a criticar con dureza el sistema de Euclides y especialmente la demostración del teorema de Pitágoras dada en los Elementos, calificando de *ratoneras* (**) todas aquellas demostraciones en las que se prueba la licitud de una afirmación reduciéndose a evitar toda desviación falsa del razonamiento, pero sin llevar al *conocimiento íntimo* de la verdad. Ningún matemático puede estar de acuerdo con este modo de pensar, pues si bien la intuición juega un importante papel eurístico como principio estimulante de la investigación científica, no se puede desconocer que en el último término, la demostración lógica tiene una importancia decisiva (***).

Muy natural es que Schopenhauer censure la forma rígida de la exposición euclídea, y que desee que *junto* a la lógica se tenga más en cuenta la intuición, pero no es disculpable que para justificar sus ideas ataque a la *demostración que da Euclides del teorema de Pitágoras,* pues ésta se distingue precisamente por ser *muy intuitiva,* como vamos a hacer ver.

Dibujemos la conocida figura del triángulo rectángulo con los cuadrados I y II construídos sobre los catetos, y el III sobre la hipotenusa (fig. 147), y tracemos la altura correspon-

---

(*) *Die Welt als Wille und Vorstellung.*

(**) *Mausefallenbeweis.*

(***) En el muy interesante discurso de *Pringsheim* «*Ueber Wert und angeblicher Unwert der Mathematik*» se encuentran discutidas estas ideas de Schopenhauer (München, 1904, Jahresb, d. d. Math. Vereinigung, 13, 1904, página 357).

diente a esta última, que prolongada divide al cuadrado III en dos rectángulos I′ y II′, de modo que

$$III = I' + II'. \qquad (1)$$

Demostremos ahora que el rectángulo I′ es igual al cuadrado I. Trazando las dos líneas auxiliares dibujadas de puntos en la figura, obtenemos los dos triángulos Δ y Δ′, rayados, el

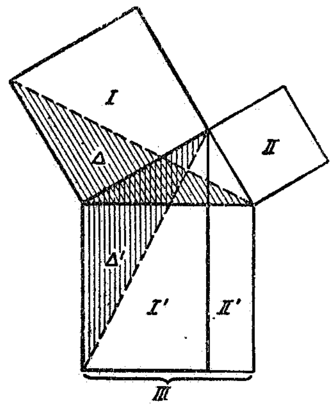

Figura 147

primero oblicua y el segundo verticalmente. El triángulo Δ tiene la misma base y la misma altura que el cuadrado I, luego

$$\Delta = \frac{1}{2} I.$$

$$\Delta' = \frac{1}{2} I'$$

y como Δ y Δ′ son congruentes, y por tanto, iguales, podemos escribir

$$I = I'.$$

Lo mismo puede demostrarse que

$$II = II'$$

y basta sumar las dos últimas igualdades para que resulte

$$I + II = III.$$

En esta demostración están mezcladas de tal modo la intuición y la lógica, que *cada paso lógico está evidenciado intuitivamente,* lo cual puede muy bien considerarse como el ideal.

La afirmación de que $\Delta = \frac{1}{2}$ I, utilizada como auxiliar, puede también ponerse en evidencia de un modo intutitivo (figura 148), considerando a Δ, merced a la traslación horizon-

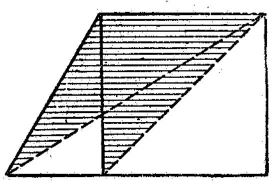

Figura 148

tal del vértice, como mitad del cuadrado I (principio de Cavalieri).

Con estos procedimientos, se pueden adquirir muchas ideas de un modo a la vez riguroso y sencillo. Por ello es muy de lamentar que no se modifique algo el sistema de exposición de Euclides, haciéndolo más fluído y adoptando el rayado y coloreado de figuras, en vez de designar estas simplemente con letras colocadas punto a sus vértices. Esto sería muy conveniente para la enseñanza, pues no cabe duda que en una figura complicada se aprecian mejor las propiedades del triángulo «rojo» o «amarillo» que las del HKF, por ejemplo.

Para mejor ver la falta de razón con que Schopenhauer censura la demostración de Euclides, véase la que, en cambio, considera como excelente, la conocida demostración de Platón, para el caso en que el triángulo rectángulo sea isósceles. Esta demostración es clarísima y convence en el acto, solamente con mirar la figura 149, pero no por ello es más intuitiva que la de Euclides, pues en ambas están la lógica y la intuición mezcladas en el mismo grado; lo que ocurre es que el caso particular presentado por Schopenhauer, permite en virtud de su propia y especial naturaleza, evidenciar intuitivamente con más facilidad el proceso lógico de la demostración.

Dando ya por terminada esta digresión sobre las ideas de Schopenhauer, vamos a continuar exponiendo nuestras observaciones sobre el desarrollo de la enseñanza geométrica en Alemania. Hasta ahora hemos estudiado solamente el desenvolvimiento de las ideas de Pestalozzi y Herbart en la enseñanza, prescindiendo de las iniciativas que han partido de las *Escuelas superiores*. Desgraciadamente, en este aspecto no pre-

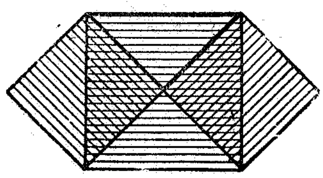

Figura 149

senta Alemania un cuadro tan satisfactorio como otros países, pues en lo referente a la Geometría, las Escuelas superiores y las medias carecen de intercambio mutuo y marchan por caminos absolutamente separados. En la primera mitad del siglo XIX, pueden citarse como excepciones los nombres de Möbius y Steiner, representantes de la Geometría moderna. Después, a causa del rápido crecimiento de la Matemática, el alejamiento aumentó todavía más y hasta los últimos años del siglo no ha podido notarse una reacción salvadora. Como testimonio representativo de este cambio de ideas, merece consignarse la aparición de la *Encyclopädie der Elementarmathemathik* de *Weber* y *Wellstein*, en tres tomos, de los cuales los más interesantes para nuestro objeto son el II (Elementos de Geometría) (*) y el III (Aplicaciones de la Matemática elemen-

(*) Primera edición. Leipzig, 1907.

tal) (*). El tomo segundo, contiene los fundamentos de la Geometría (Wellstein), Trigonometría (Weber y Jacobsthal) y Geometría analítica (Weber) y el tercero la teoría de vectores y la estática gráfica (Wellstein). Esta enciclopedia tiene, no obstante, a nuestro juicio, el defecto de que los autores se han limitado a presentar aquellas materias en que están especializados, tratándolas además de un modo demasiado abstracto, aunque siempre interesante, en lugar de adoptar una orientación general que les permitiese abarcar la totalidad de la Geometría, tal y como es de necesidad para la aplicación a la práctica de la enseñanza. Este es el camino que hemos procurado seguir en el curso de conferencias reproducido en este libro, presentar un cuadro general de la Geometría, en el que se conceda a cada una de las partes que la integran tanta importancia como a las demás. Unicamente queda por estudiar, cuáles de estas materias son adaptables a la segunda enseñanza y con qué extensión se pueden introducir en ella.

La solución de este problema ha sido intentada muchas veces, pero puede asegurarse que aún no se ha llegado a obtenerla. Existen, sin embargo, dos libros, que consideran la cuestión desde interesantes puntos de vista. Uno de ellos es el *plan austriaco de* 1900 (**) que descansa en las mismas bases que aquéllas, distingue dos grados en el Gimnasio: superior e inferior, cada uno de cuatro años.

En el grado inferior, la enseñanza se mantiene exclusivamente en el aspecto intuitivo, utilizando ampliamente el dibujo, tendencia que se conserva también en el grado superior junto a la aparición de las primeras consideraciones lógicas. Lo más interesante del plan de estudios son las explicaciones sobre la enseñanza matemática que le acompañan, las cuales acreditan la extraordinaria competencia del autor, que no sabemos quién sea. Esto constituye una dichosa excepción entre los planes de estudio oficiales, pues en la mayoría de ellos la

(*) Primera edición. Leipzig, 1907. Segunda edición en dos partes, 1910-1912.

(**) Lehrplan und Instruktionen für den Unterricht an Gymnasien in Osterrich. Segunda edición, Wien, 1900.

parte matemática está tratada con tal brevedad, que no se puede sacar de su lectura ninguna idea determinada.

El otro libro, de los dos a que nos referíamos, es el «*Lehrbuch der Elementargeometrie*» de *Henrici* y *Treutlein*, en el que sus autores han incluído la *Geometría proyectiva*, entonces disciplina nueva, y la *analítica*, esta última en íntima conexión con la Trigonomatría. La distribución de materias de este libro, está basada en las transformaciones geométricas, estudiadas en este orden: *congruencia*, *semejanza y perspectividad*, tal y como lo hizo Möbius por primera vez en su «*Cálculo Baricéntrico*». El texto de Henrici y Treutlein contiene también interesantes aplicaciones; así, al final de la segunda parte se encuentra un plano topográfico del Gran Ducado de Baden (los autores eran badenses), destinado a hacer ver a los alumnos el objeto y utilidad de la Trigonometría; seguramente esto contribución de la ciencia al conocimiento de su patria, sería de un gran valor para la enseñanza de los alumnos. Análogamente, debería hacerse en las escuelas alemanas con la medición hecha por Gauss del triángulo Hagen-Brocken-Inselberg.

La obra de *Henrici-Treutlein* es, pues, de un gran valor, y a la que solamente puede ponerse algún reparo, considerándola desde el punto de vista de los actuales conocimientos. En efecto, faltan en ella las *transformaciones generales* procedentes de las lineales de la Geometría proyectiva y el *concepto de función*, tan importantes según las exigencias modernas. También se echa de menos la *conclusión filosófica* de la Geometría que el estudio de la Axiomática proporciona, la cual sería de gran provecho para los alumnos de las clases superiores de segunda enseñanza.